**Oefening 2:**

$$\begin{cases} x = -2a\ln(\alpha t) \\ y = bt^2 \end{cases} \qquad a, b, \alpha : \text{constanten}$$

a) baan van het punt

eliminatie van t :

$$-\frac{x}{2a} = \ln \alpha t$$

$$\Rightarrow \quad e^{-\frac{x}{2a}} = \alpha t$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{e^{-\frac{x}{2a}}}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{b}{\alpha^2} e^{-\frac{x}{a}}$$

b) snelheid van het punt

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{2a}{t} \\ \dot{y} = 2bt \end{cases}$$

c) modulus van de snelheid

$$\begin{aligned} v &= \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{4a^2}{t^2} + 4b^2t^2\right)^{1/2} \\ &= \frac{2}{t}\left(a^2 + b^2t^4\right)^{1/2} \end{aligned}$$

d) snelheidshodograaf

= baan beschreven door het eindpunt van de snelheidsvector

eliminatie van t

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{2a}{t} \\ \dot{y} = 2bt \end{cases} \Rightarrow \quad \dot{x}\dot{y} = -4ab \qquad \text{gelijkzijdige hyperbool}$$

e) versnelling van het punt

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{2a}{t^2} \\ \ddot{y} = 2b \end{cases}$$

f) modulus van de versnelling

$$j = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \frac{2}{t^2}\left(a^2 + b^2 t^4\right)^{1/2}$$

g) versnellingshodograaf

$$\ddot{y} = 2b$$

h) tang. en norm. component van de versnelling: $j_t$ en $j_n$

we gebruiken de stelling van Huygens:

$$\bar{j} = \frac{dv}{dt}\bar{1}_t + \frac{v^2}{\rho}\bar{1}_n = j_t \bar{1}_t + j_n \bar{1}_n$$

$$\begin{aligned} j_t = \frac{dv}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\frac{2}{t}\left(a^2 + b^2 t^4\right)^{1/2}\right] \\ &= 2\left[-\frac{1}{t^2}\sqrt{a^2 + b^2 t^4} + \frac{1}{t}\frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2 t^4}} 4b^2 t^3\right] \\ &= \frac{2\left(b^2 t^4 - a^2\right)}{t^2\sqrt{a^2 + b^2 t^4}} \end{aligned}$$

voor de bepaling van $j_n$ gaan we hier niet gebruik maken van $j_n = \dfrac{v^2}{\rho}$, omdat we de kromtestraal nog niet kennen, maar :

$$\bar{j} = j_t \bar{1}_t + j_n \bar{1}_n \qquad \Rightarrow \qquad |\bar{j}| = \sqrt{j_t^2 + j_n^2}$$

$$\Rightarrow \qquad j_n = +\sqrt{|\bar{j}|^2 - j_t^2}$$

$$\Rightarrow \qquad j_n = \ldots = \frac{4ab}{\sqrt{a^2 + b^2 t^4}}$$

i) kromtestraal van de baan

met $\rho = \pm \dfrac{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}{y''} \qquad ' = \dfrac{d}{dx}$

of $\rho = \dfrac{v^2}{j_n} = \ldots = \dfrac{\left(a^2 + b^2 t^4\right)^{3/2}}{abt^2}$

f) hoek tussen snelheid en versnelling

$$\bar{v} = v\bar{1}_t$$

$$\bar{j} = j_t \bar{1}_t + j_n \bar{1}_n$$

$$\Rightarrow \qquad \bar{v}.\bar{j} = vj_t = vj\cos\alpha$$

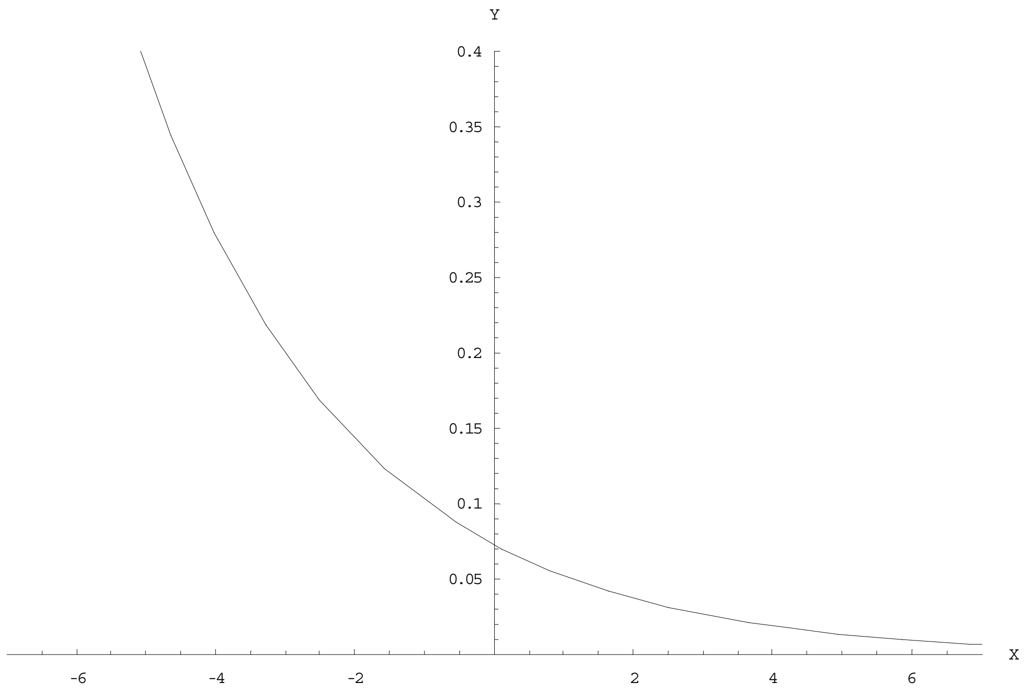
$$\Rightarrow \qquad \cos\alpha = \frac{j_t}{j}$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha = \mathrm{Bg}\cos\left(\frac{j_t}{j}\right) = \ldots = \mathrm{Bg}\cos\left(\frac{b^2 t^4 - a^2}{a^2 + b^2 t^4}\right)$$

De baan van het punt :

Parametervergelijking : $\begin{cases} x = -2a\mathrm{Ln}(\alpha t) \\ y = bt^2 \end{cases}$ Expliciete vergelijking :

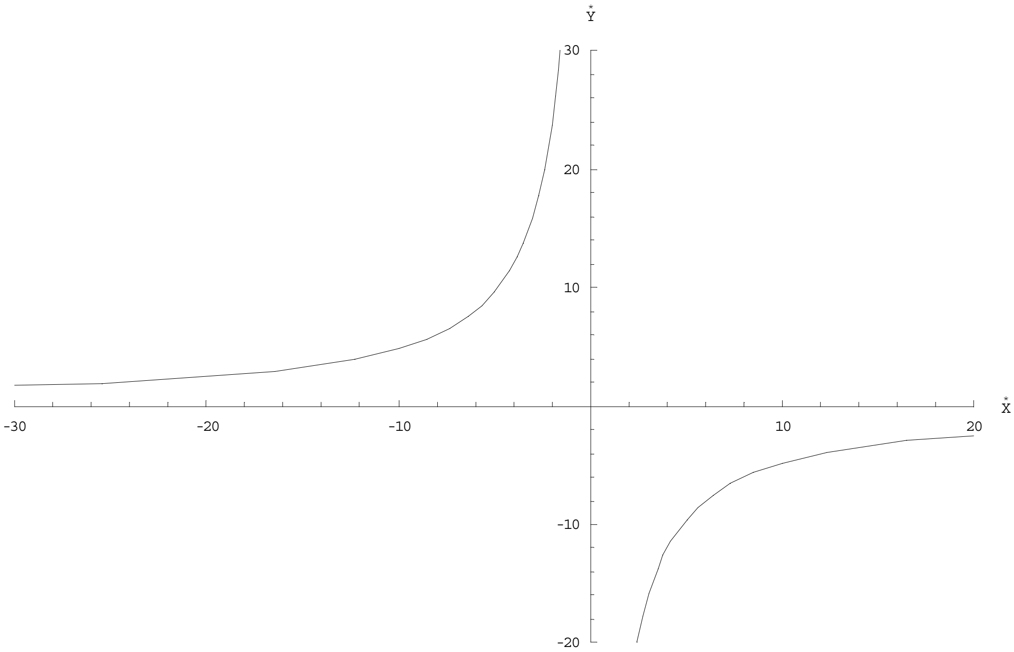
$$y = \frac{b}{\alpha^2} e^{-\frac{x}{a}}$$




Als t = 0 $\Rightarrow$ x = -2a Ln(α.0) = ∞ ; Als t = 1/α $\Rightarrow$ x = 0 ; Als t = ∞ $\Rightarrow$ x = -∞

Snelheidshodograaf :

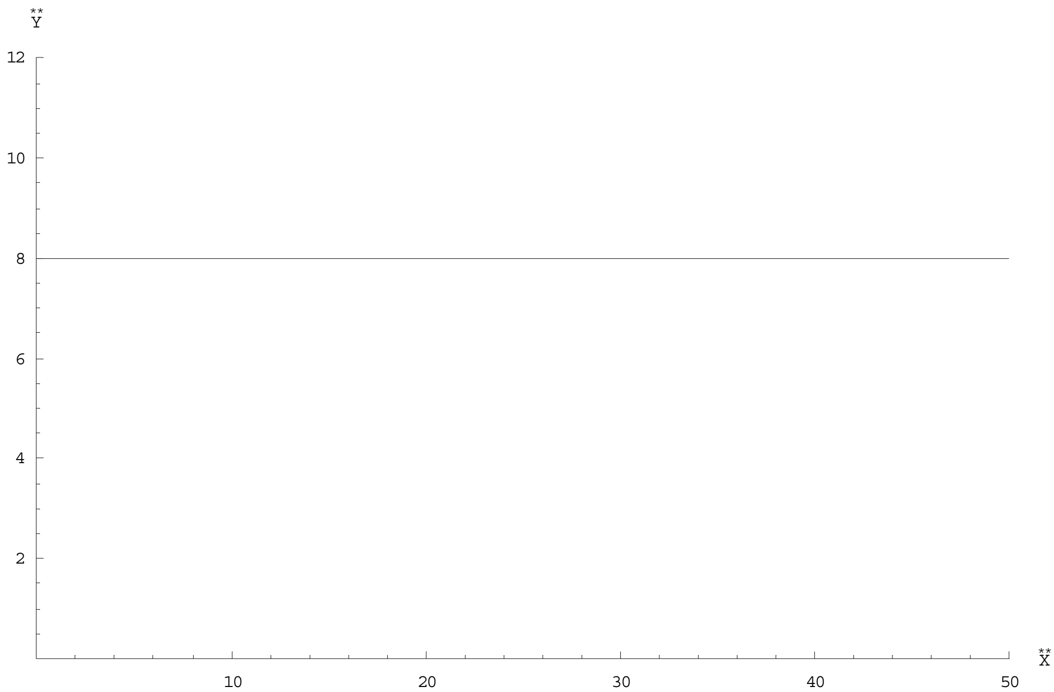
Parametervergelijking $\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{2a}{t} \\ \dot{y} = 2bt \end{cases}$ Expliciete vergelijking : $\dot{y} = -\dfrac{4ab}{\dot{x}}$




Als t = 0 $\Rightarrow$ $\dot{x}$ = -∞ ; Als t = ∞ $\Rightarrow$ $\dot{x}$ = 0

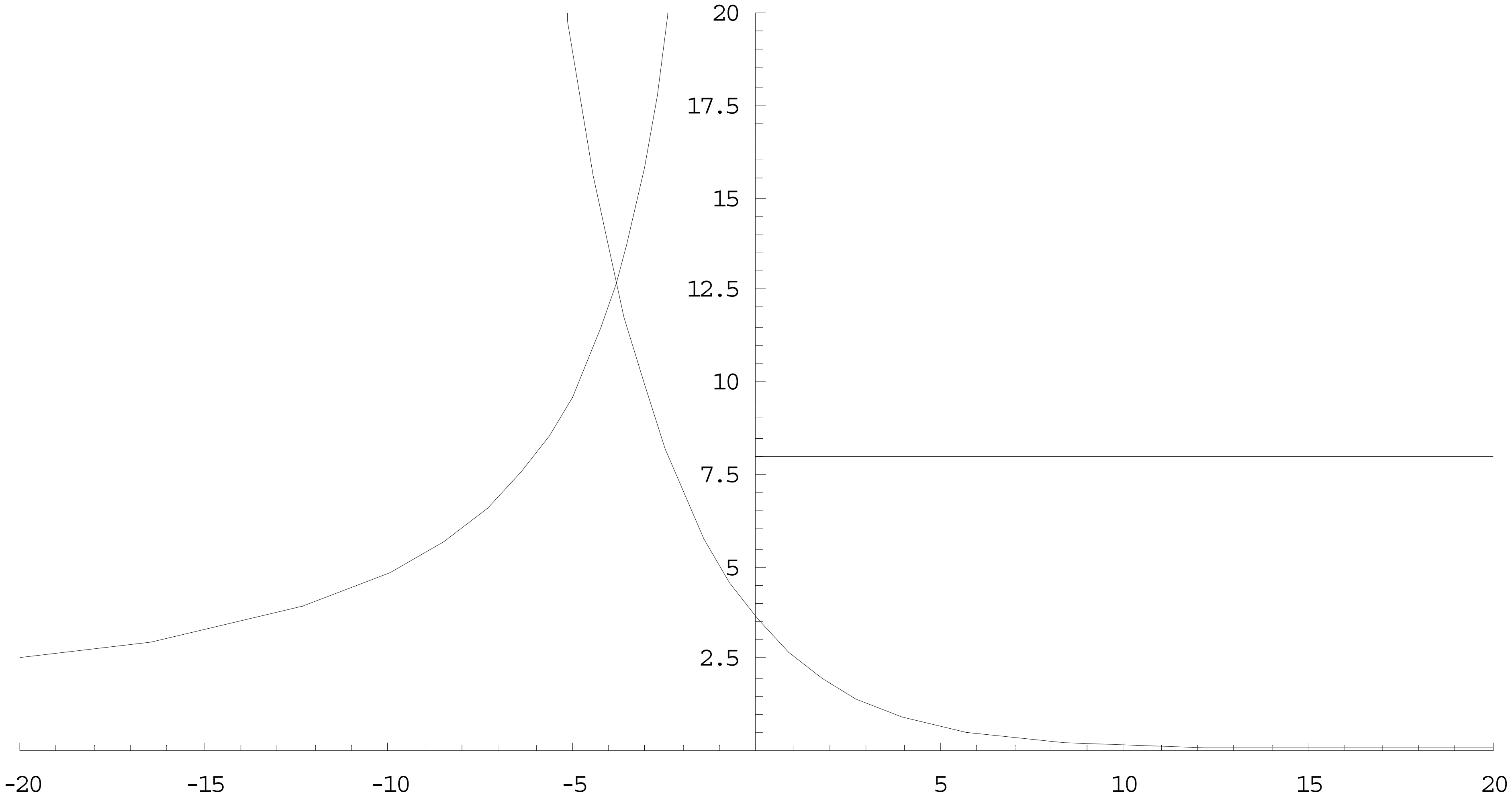
Versnellingshodograaf :

Parametervergelijking : $\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{2a}{t^2} \\ \ddot{y} = 2b \end{cases}$ Expliciete vergelijking : $\ddot{y} = 2b$

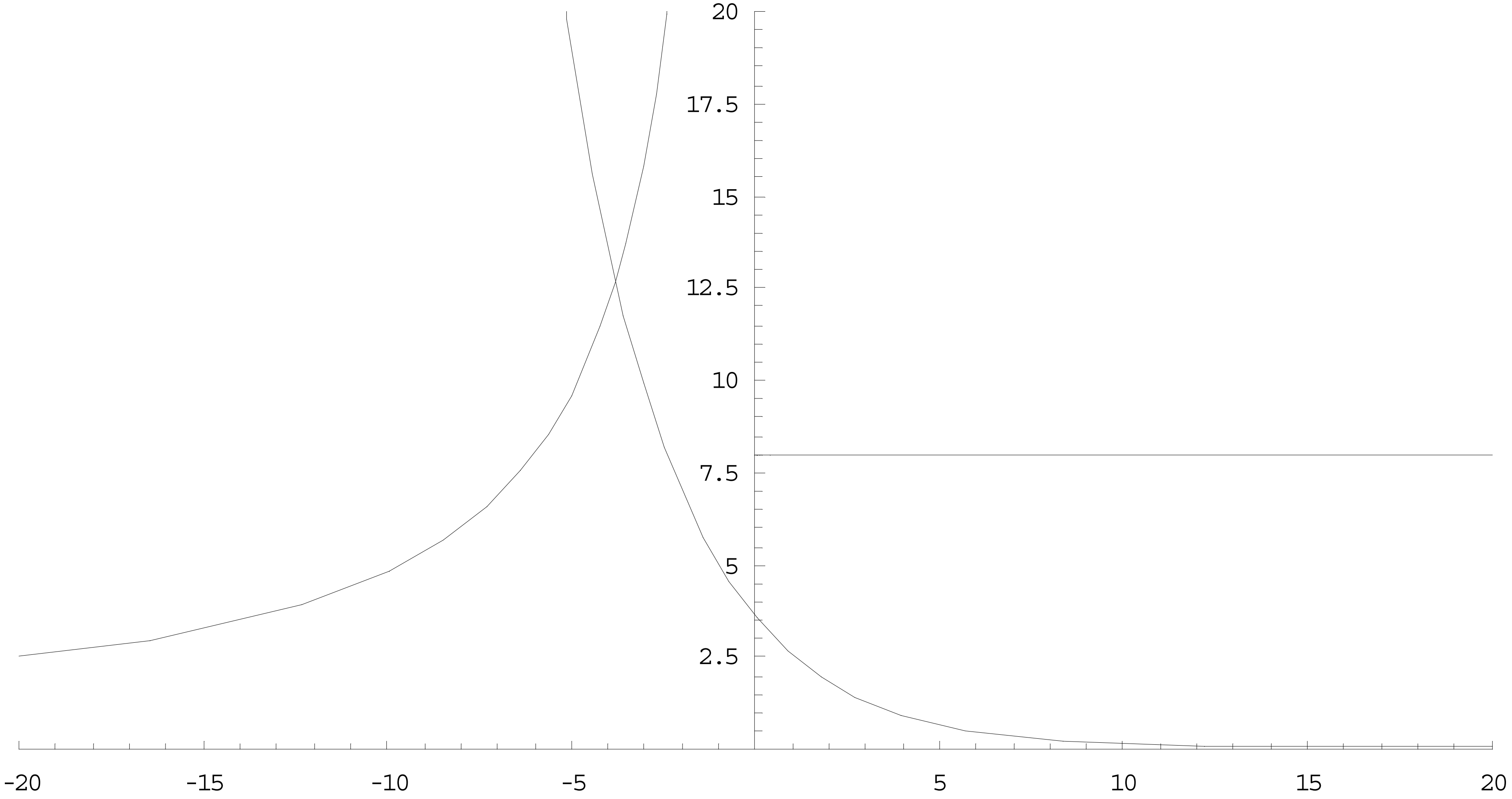



Als $t = 0 \Rightarrow \ddot{x} = \infty$; Als $t = \infty \Rightarrow \ddot{x} = 0$

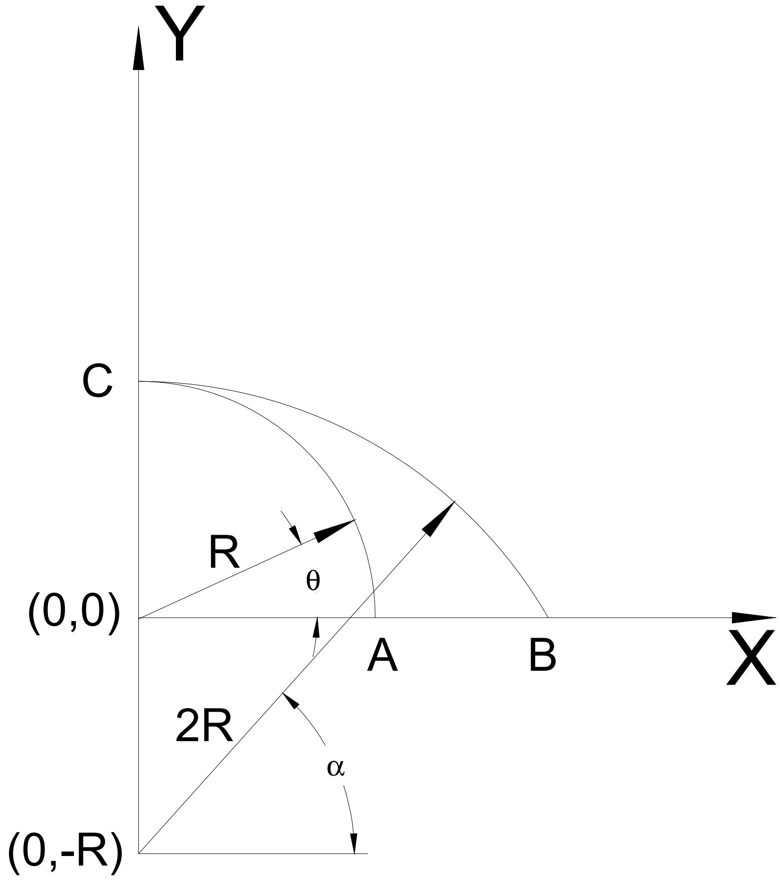
De drie grafieken tesamen waar de waarde van $\alpha\,(e^2/7)$ aangepast werd om schaalredenen. Voor $t = 1.5$ krijgen we : $\begin{cases} x = -2.75 \\ \dot{x} = -4 \\ \ddot{x} = 2.67 \end{cases}$



We starten met een oneindige snelheid. Initieel wordt het punt vertraagd, waarna ergens terug moet versneld worden omdat de snelheid bij $t = \infty$ terug oneindig wordt. Om dit keerpunt te zoeken stellen we Jt=0 en lossen op naar de parameter t. Dit geeft $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ en krijgen we : $\begin{cases} x = 0.54 \\ \dot{x} = -6.92 \\ \ddot{x} = 8 \end{cases}$



**Oefening 31:**




Punt op baan AC: (bespreking in poolcoördinaten)

$$\begin{cases} x_A = R\cos\theta \\ y_A = R\sin\theta \end{cases}$$

snelheid in poolcoördinaten:

$$\bar{v}_A(\dot{r}, r\dot{\theta}) \qquad \text{en } r = R = cte$$
$$\Rightarrow \quad \bar{v}_A(0, R\dot{\theta})$$
$$\Rightarrow \quad v_A = R\dot{\theta}$$

versnelling in poolcoördinaten:

$$\bar{a}_A(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2, r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$
$$\Rightarrow \bar{a}_A(-R\dot{\theta}^2, R\ddot{\theta})$$

kinematisch gegeven voor punt op AC:

constante tangentiële versnelling $\Rightarrow$ $\bar{a}_A(\dots, a)$

$$\Rightarrow \quad R\ddot{\theta} = a$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{a}{R}t + \dot{\theta}_0$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{a}{2R}t^2 + \frac{v_0}{R}t + \underbrace{\theta_0}_{=0}$$

<u>Punt op baan BC:</u> (bespreking in poolcoördinaten)

$$\begin{cases} x_B = 2R\cos\alpha \\ y_B = -R + 2R\sin\alpha \end{cases}$$

begin: $t = 0 : y_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha_0 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{6}$

kinematisch gegeven voor punt op BC:

constante snelheid $\Rightarrow$ $v_B = v_1 = cte$

$$\Rightarrow \quad 2R\dot{\alpha} = v_1$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{v_1}{2R}t + \alpha_0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{v_1}{2R}t + \frac{\pi}{6}$$

<u>Twee banen combineren door de eindvoorwaarden in punt C:</u>

1ste voorwaarde: tesamen aankomen in punt C

punt B: $\Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} = \frac{v_1}{2R}t_C + \frac{\pi}{6}$

punt A: $\Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} = \frac{a}{2R}t_C^2 + \frac{v_0}{R}t_C$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} = \frac{a}{2R}\left(\frac{2\pi R}{3v_1}\right)^2 + \frac{v_0}{R}\frac{2\pi R}{3v_1} \qquad (1)$$

2de voorwaarde: met dezelfde snelheid in punt C aankomen

$$\Rightarrow \quad \mathbf{v_A}\big|_C = \mathbf{v_B}\big|_C$$

$$\Rightarrow \quad R\dot{\theta}\big|_C = 2R\dot{\alpha}\big|_C$$

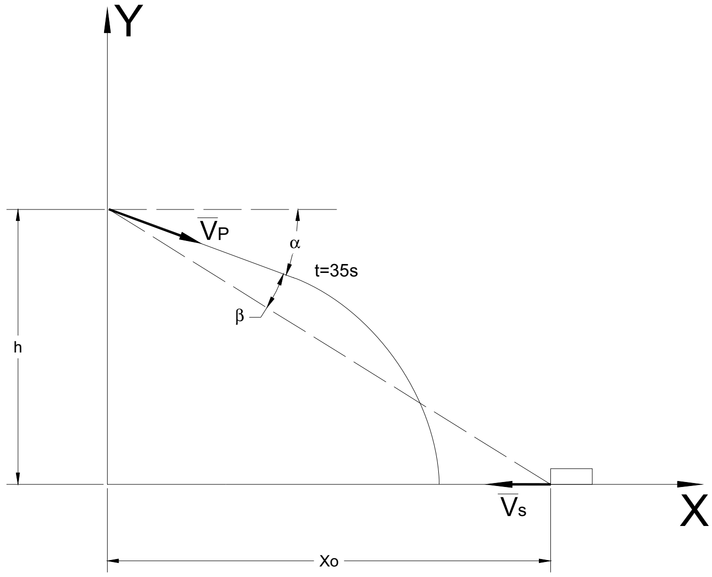
$$\Rightarrow \quad a t_C + v_0 = v_1$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = a\frac{2\pi R}{3v_1} + v_0 \qquad (2)$$

(1) en (2) vormen een stelsel in de onbekende ($a$,$v_0$), oplossen geeft:

$$\begin{cases} a = \dfrac{3v_1^2}{4\pi R} \\ v_0 = \dfrac{v_1}{2} \end{cases}$$

## Oefening 27:




Gegevens:

$$v_P = 792 \ {}^{km}\!/_{h} = 220 \ {}^{m}\!/_{s}$$

$$\alpha = 15° \qquad ; \qquad h = 3 \ km$$

$$v_S = 13{,}61 \ \text{knopen} = 13{,}61 \text{ x } 1{,}852 = 25{,}21 \ {}^{km}\!/_{h} = 7 \ {}^{m}\!/_{s}$$

$$a_r = 1 \ {}^{m}\!/_{s^2} \qquad \text{gedurende } 35 \text{ s}$$

Bepaal $\alpha_0$ en $\beta$ om het schip te raken

Koppeling tussen $\alpha_0$ en $\beta$: $$tg(\alpha + \beta) = \frac{h}{x_0}$$

Schip:

$$\bar{v}_S = -v_S \bar{1}_x \qquad \Rightarrow \qquad x_S = -v_S t + x_O$$

Vliegtuig:

$$\bar{v}_P = (v_P \cos\alpha, -v_P \sin\alpha)$$

Raket:

**$0 \to 35s$**

$$a_r = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{a}_r = (\cos\alpha,\ -\sin\alpha)$$

$$\Rightarrow \qquad \bar{v}_r = \left(\cos\alpha.t + v_{P_x},\ -\sin\alpha.t + v_{P_y}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \bar{r}_r = \left(\cos\alpha.\frac{t^2}{2} + v_{P_x}t,\ -\sin\alpha.\frac{t^2}{2} + v_{P_y}t + h\right)$$

na 35 s:

$$\bar{v}_r(35s) = (246{,}31;\ -66)$$

$$\bar{r}_r(35s) = (8029{,}13;\ 848{,}57)$$

**$35s \to ...$**

raket enkel onderhevig aan het zwaarteveld

$$\Rightarrow \qquad \bar{a}_r = (0,\ -g)$$

$$\Rightarrow \qquad \bar{v}_r = \left(v_{0_x},\ -gt + v_{0_y}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \bar{r}_r = \left(v_{0_x}t + x_{0_r},\ -g\frac{t^2}{2} + v_{0_y}t + y_{0_r}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \bar{r}_r = \left(246{,}31t + 8029{,}13;\ -9{,}81\frac{t^2}{2} - 66t + 848{,}57\right)$$

tijd bepalen wanneer raket de zeespiegel bereikt (y=0):

$$-9{,}81\frac{t^2}{2} - 66t + 848{,}57 = 0 \qquad \textbf{VKV oplossen}$$

$$\Rightarrow \qquad t_1 = 8{,}05\ s$$

$$t_2 = -21{,}5\ s \qquad \textbf{negatieve tijd}$$

dus:

$$x_r(\text{zeespiegel}) = 8029{,}13 + 246{,}31 * 8{,}05 = 10011{,}19\ m$$

$$t_r(\text{zeespiegel}) = 35 + 8{,}05 = 43{,}05\ s$$

combineren met de baan van het schip:

$$10011{,}19 = x_0 - 7 * 43{,}05$$

$$\Rightarrow \qquad x_0 = 10{,}312\ km$$

$$\Rightarrow \qquad \beta = \text{Bgtg}\left(\frac{h}{x_0}\right) - \alpha = 1{,}22°$$